

Brevet des Collèges
DNB 2014 Centres étrangers

Mardi 17 Juin 2014
Correction

Exercice 1. 4 points

Voici une feuille de calcul obtenue à l'aide d'un tableur.

Dans cet exercice, on cherche à comprendre comment cette feuille a été remplie.

	A	B	C
1	216	126	90
2	126	90	36
3	90	36	54
4	54	36	18
5	36	18	18
6	18	18	0

1. En observant les valeurs du tableau, proposer une formule à entrer dans la cellule C1, puis à recopier vers le bas.

La formule à entrer en C1 est :

$$\boxed{= A1 - B1}$$

2. ***Dans cette question, on laissera sur la copie toutes les traces de recherche. Elles seront valorisées.***

Le tableur fournit deux fonctions MAX et MIN. à partir de deux nombres, MAX renvoie la valeur la plus grande et MIN la plus petite. (exemple MAX(23 ; 12) = 23)
Quelle formule a été entrée dans la cellule A2, puis recopiée vers le bas ?

La formule à entrer en A2 est :

$$\boxed{= MAX(B1; C1)}$$

3. Que représente le nombre figurant dans la cellule C5, par rapport aux nombres 216 et 126 ?

Le nombre figurant dans la cellule C5, représente le **PGCD des nombres 216 et 126**.

4. La fraction $\dfrac{216}{126}$ est-elle irréductible ? Si ce n'est pas le cas, la rendre irréductible en détaillant les calculs.

- Avec le tableau proposé, on a calculé le PGCD des entiers 216 et 126 à l'aide de l'algorithme des différences qui est basé sur la propriété suivante :

> **Proposition 1**
>
> Le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b, avec $a \geq b$, est le même que celui de b et de leur différence.
>
> $$PGCD(a\ ;\ b) = PGCD(b\ ;\ a - b)$$

- Donc le PGCD de 216 et 126 est la dernière différence non nulle soit 18 ;
- De ce fait 216 et 126 ne sont pas premiers entre eux et la fraction n'est pas irréductible ;
- Rendons la fraction irréductible :

Théorème 1

Quand on simplifie une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

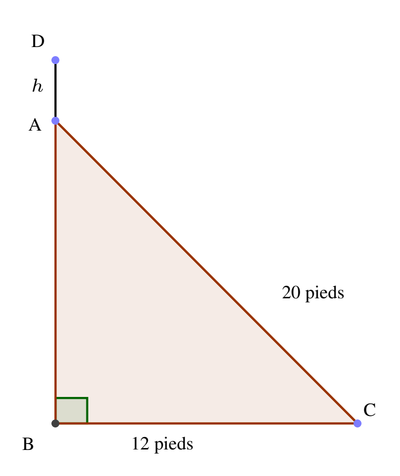
Donc ici on obtient une fraction irréductible en divisant numérateur et dénominateur par leur PGCD 18 :

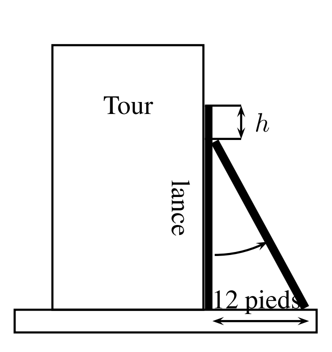
$$\boxed{\frac{216}{126} = \frac{18 \times 12}{18 \times 7} = \frac{12}{7}}$$

Exercice 2. 3 points

Une lance, longue de 20 pieds, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol. Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?

On va faire un schéma pour modéliser la situation.





Le triangle ABC est rectangle en B puisque d'après les données « la tour considérée comme perpendiculaire au sol ». Donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$20^2 = AB^2 + 12^2$$
$$AB^2 = 20^2 - 12^2$$
$$AB^2 = 256$$

Or AB est positif car c'est une longueur donc

$$AB = \sqrt{256} = 16 \text{ pieds}$$

La lance, posée verticalement contre le mur, était à une distance de $AD = 20$ pieds du sol. Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, l'autre extrémité de la lance le long du mur descend donc de :

$$\boxed{AD - AB = h = 20 - 16 = 4 \text{ pieds}}$$

Exercice 3. 6 points

Attention les figures tracées ne respectent ni les mesures de longueur, ni les mesures d'angle

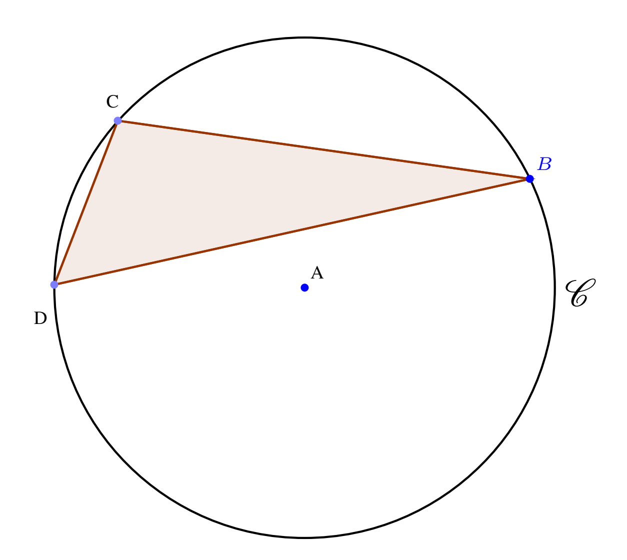
Répondre par « vrai » ou « faux » ou « on ne peut pas savoir » à chacune des affirmations suivantes et expliquer votre choix.

1.

Affirmation 1 (Fausse)

Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle.

Un triangle inscrit dans un cercle n'est rectangle que si un de ses côtés est un diamètre du cercle. Le cercle circonscrit à un triangle équilatéral par exemple propose un contre exemple à cette affirmation, tout comme le triangle ci-dessous. **L'affirmation 1 est fausse**.



2.

Affirmation 2 (Vraie* sous réserve)

Si un point M appartient à la médiatrice d'un segment [AB] alors le triangle AMB est isocèle.

Par propriété on a :

Propriété 1

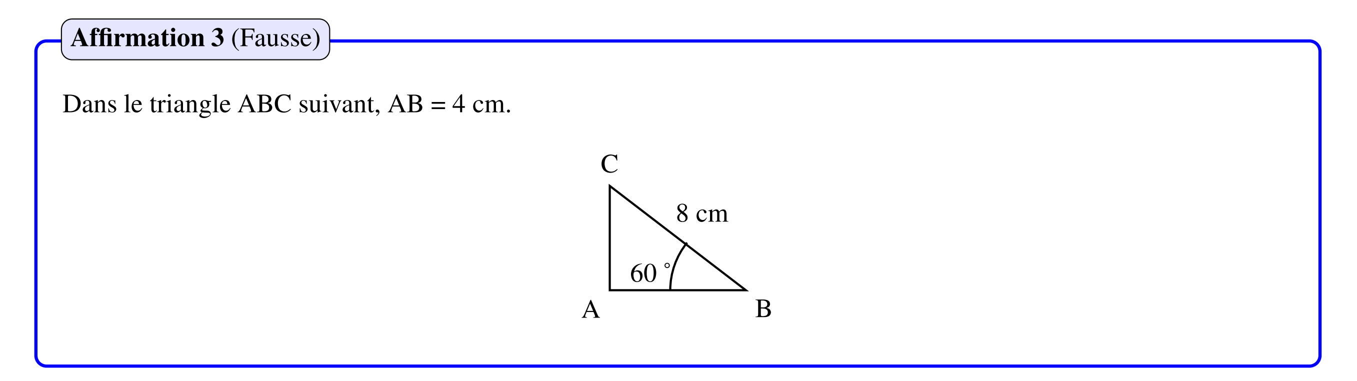
Si un point M appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant aux extrémités du segment.

Donc si le point M appartient à la médiatrice d'un segment [AB] ; la propriété 1 implique que les distances MA et MB sont égales. De ce fait deux cas de figure :

- si le point M appartient aussi au segment [AB], le triangle AMB est aplati, M est le milieu du segment [AB] ;
- sinon le triangle AMB est isocèle en M.

L'affirmation 2 est vraie si on considère le cas du triangle aplati valide.

3.

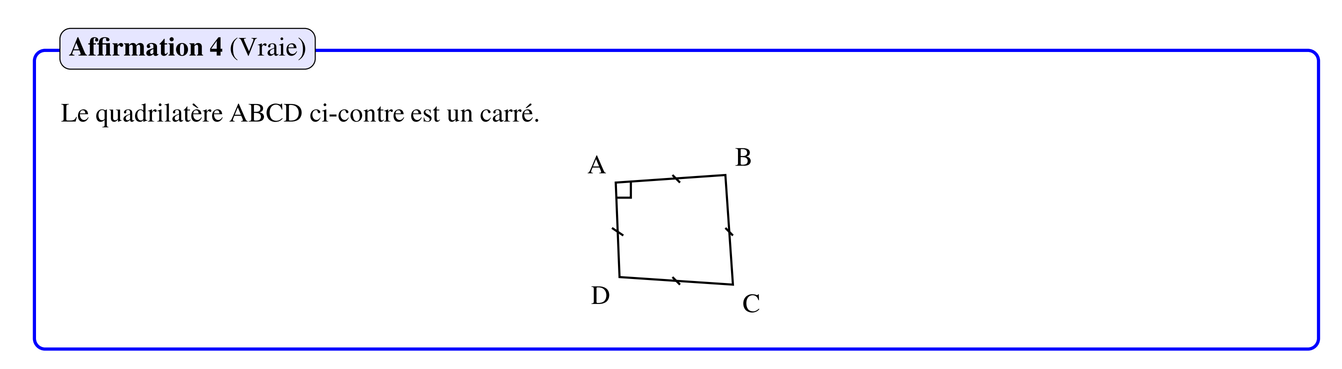


Affirmation 3 (Fausse)

Dans le triangle ABC suivant, AB = 4 cm.

Il existe une infinité de triangles dont un côté [BC] fait 8 cm et l'angle $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. On ne peut que répondre que **l'affirmation 3 est fausse**.

4.



Affirmation 4 (Vraie)

Le quadrilatère ABCD ci-contre est un carré.

Le quadrilatère ABCD a 4 côtés de même mesure donc c'est un losange. Or un losange ayant un angle droit est un carré. **Donc l'affirmation 4 est vraie**.
On peut démontrer qu'un losange ayant un angle droit est un carré en utilisant la propriété liée aux angles d'un losange :

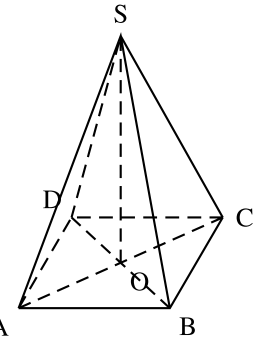
Propriété 2

Si un quadrilatère est un losange alors ses angles opposés sont de même mesure et deux angles consécutifs sont supplémentaires.

Exercice 4. 5 points

Paul en visite à Paris admire la Pyramide, réalisée en verre feuilleté au centre de la cour intérieure du Louvre. Cette pyramide régulière a :

- pour base un carré ABCD de côté 35 mètres ;
- pour hauteur le segment [SO] de longueur 22 mètres.



Paul a tellement apprécié cette pyramide qu'il achète comme souvenir de sa visite une lampe à huile dont le réservoir en verre est une réduction à l'échelle $\dfrac{1}{500}$ de la vraie pyramide.
Le mode d'emploi de la lampe précise que, une fois allumée, elle brûle 4 cm^3 d'huile par heure.
Au bout de combien de temps ne restera-t-il plus d'huile dans le réservoir ? Arrondir à l'unité d'heures.

- **Calcul du volume de la pyramide**
Le volume de la pyramide est égal au tiers du produit de l'aire du carré de base, ABCD, par la hauteur SO donc :

$$\boxed{\mathscr{V} = \frac{AB^2 \times SO}{3} = \frac{35^2 \times 22}{3} = \frac{26\ 950}{3} \text{ m}^3}$$

- **Calcul du volume de la pyramide réduite**
« Le réservoir en verre est une réduction à l'échelle $\frac{1}{500}$ de la vraie pyramide » donc les distances sont divisées par 500 et, d'après le cours, les aires le sont par 500^2 et les volumes par 500^3.
Le volume de la pyramide réduite est donc :

$$\mathscr{V}' = \frac{\mathscr{V}}{500^3}$$
$$\mathscr{V}' = \frac{26\ 950}{3} \times \frac{1}{500^3} \text{ m}^3$$

Or on a $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$

$$\mathscr{V}' = \frac{26\ 950}{3} \times \frac{1}{500^3} \times 10^6 \text{ cm}^3$$

$$\boxed{\mathscr{V}' = \frac{1\ 078}{15} \text{ cm}^3}$$

- **Proportionnalité**
« Une fois allumée, elle brûle 4 cm^3 d'huile par heure », donc on peut trouver au bout de combien de temps il ne restera plus d'huile dans le réservoir à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

Volume (cm^3)	4 cm^3	$\frac{1\ 078}{15}$ cm^3
Temps (heures)	1 h	t ?

Donc le temps cherché est, arrondi à l'unité d'heure :

$$\boxed{t = \frac{\frac{1\ 078}{15} \times 1}{4} = \frac{539}{30} \text{ heures} \approx 18 \text{ heures}}$$

Le réservoir sera vide au bout **d'environ 18 heures**.

Exercice 5. 3 points

1. Développer et réduire l'expression : $(2n+5)(2n-5)$ où n est un nombre quelconque.

$$\boxed{(2n+5)(2n-5) = (2n)^2 - 5^2 = 4n^2 - 25}$$

2. En utilisant la question 1, calculer 205×195.
Pour $n = 100$ on a :

$$\begin{aligned}(2n+5)(2n-5) &= (2 \times 100 + 5)(2 \times 100 - 5)\\ &= 205 \times 195\\ &= 4n^2 - 25\\ &= 4 \times 100^2 - 25\\ &= 39\ 975\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{205 \times 195 = 4 \times 100^2 - 25 = 39\ 975}$$

Exercice 6. 6 points

Pour préparer son voyage à Marseille, Julien utilise un site Internet pour choisir le meilleur itinéraire. Voici le résultat de sa recherche :

Calculez votre itinéraire		**59 000 Lille–13 000 Marseille**	
Départ		Coût estimé	Péage 73,90 €
59 000 Lille France			Carburant 89,44 €
		Temps	8 h 47 dont
			8 h 31 sur autoroute
Arrivée			
13 000 Marseille France		Distance	1 004 km dont
			993 km sur autoroute

1. Quelle vitesse moyenne, arrondie au km/h, cet itinéraire prévoit-il pour la portion de trajet sur autoroute ?
Cet itinéraire prévoit de faire 993 km sur autoroute en 8 h 31 min soit en $8 \times 60 + 31 = 511$ minutes, donc pour calculer la vitesse moyenne, on calcule la distance parcourue en 1 h = 60 min :

Distance (km)	993 km	d ?
temps (minutes)	511 minutes	60 minutes

$$d = \frac{993 \times 60}{511} \approx 116,59 \text{ km}$$

La vitesse moyenne, arrondie au km/h, pour la portion de trajet sur autoroute est de

$$\boxed{v = 117 \text{ km.h}^{-1}}$$

2. Sachant que la sécurité routière préconise au moins une pause de 10 à 20 minutes toutes les deux heures de conduite, quelle doit être la durée minimale que Julien doit prévoir pour son voyage ?
Il doit effectuer 4 pauses d'une durée minimale de 10 minutes. Son trajet sera donc de **8h 47min + 40min soit 9h 27min**.

Pour cette question, faire apparaître sur la copie la démarche utilisée. Toute trace de recherche sera prise en compte lors de l'évaluation même si le travail n'est pas complètement abouti.

3. Sachant que le réservoir de sa voiture a une capacité de 60 L et qu'un litre d'essence coûte 1,42 €, peut-il faire le trajet avec un seul plein d'essence en se fiant aux données du site internet ?
Le trajet prévoit un coût de 89,44 € pour le carburant. Or un litre d'essence coûte 1,42 € donc :

Volume essence (L)	v ?	1 litre
prix (€)	89,44 €	1,42 €

$$v = \frac{89,44 \times 1}{1,42} \approx 63 \text{ litres}$$

Sachant que le réservoir de sa voiture a une capacité de 60 L, **il ne pourra donc pas faire le trajet avec un seul plein d'essence**.

Exercice 7. 7 points

Il existe différentes unités de mesure de la température : en France on utilise le degré Celsius (˚C), aux États-Unis on utilise le degré Fahrenheit (˚ F).

Pour passer des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit, on multiplie le nombre de départ par $1,8$ et on ajoute 32 au résultat.

1. Qu'indiquerait un thermomètre en degrés Fahrenheit si on le plonge dans une casserole d'eau qui gèle ? On rappelle que l'eau gèle à 0 ˚ C.

Si la température est de 0 ˚ C alors elle est de

$$\boxed{0 \times 1,8 + 32 = 32^{\circ}F}$$

2. Qu'indiquerait un thermomètre en degrés Celsius si on le plonge dans une casserole d'eau portée à 212 ˚F ? Que se passe t-il ?

On appelle t la température en ˚C. On a alors :

$$1,8t + 32 = 212 \iff 1,8t = 180 \iff t = \frac{180}{1,8} = 100$$

Le thermomètre indiquerait alors **100˚C**. **L'eau bout à cette température**.

3.

3. a. Si l'on note x la température en degré Celsius et $f(x)$ la température en degré Fahrenheit, exprimer $f(x)$ en fonction de x.

$$\boxed{f(x) = 1,8x + 32}$$

3. b. Comment nomme-t-on ce type de fonction ?

La fonction f est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = 1,8$ et $b = 32$ donc c'est une **fonction affine**.

3. c. Quelle est l'image de 5 par la fonction f ?

L'image par 5 par la fonction f est

$$\boxed{f(5) = 1,8 \times 5 + 32 = 41}$$

3. d. Quel est l'antécédent de 5 par la fonction f ?

L'antécédent de 5 par la fonction f est la solution de l'équation $f(x) = 5$ soit :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\iff 1,8x + 32 = 5 \\ &\iff 1,8x = 5 - 32 = -27 \\ &\iff x = \frac{-27}{1,8} = -15 \end{aligned}$$

L'antécédent de 5 par la fonction f est -15.

3. e. Traduire en terme de conversion de température la relation $f(10) = 50$.

Puisque $f(10) = 50$ cela signifie donc que **10˚C = 50˚F**.

- Fin du devoir -